Lista 8: Cálculo I

A. Ramos *

June 11, 2018

Abstract

Lista em constante atualização.

1. Técnicas de integração;
2. Integral imprópria;
3. Aplicações da integral.

1 Exercícios

Faça do livro texto, os exercícios correspondentes aos temas desenvolvidos em aula.

2 Exercícios adicionais

1. Considere a função $F(x) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$, $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Prove que F é crescente e ímpar;
   (b) Mostre que $F(x) + x^{-1} \leq F(1) + 1$, para todo $x \geq 1$;
   (c) Prove que $\lim_{x\to} F(x)$ existe e é positivo;
   (d) Calcule o ponto de inflexão de $F(x)$.
2. Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo x de:
   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{x}, (x-1)^2 \leq 1 - y^2\}$; *Rpta:* $\pi/6$.
   (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2], e^{-x} \leq y \leq e^x\}$; *Rpta:* $\pi(e^2 - e^{-2})^2/2$.
   (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq 1, 1 \leq xy \leq 4/x\}$; *Rpta:* $5\pi/6$.
3. Determine o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ ao girar em torno da reta $x = b$ $(b > a)$.
4. Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno da reta $y = 3$ da região limitada pelas parábolas $y = 2 - x^2$ e $y = x^2$. *Rpta:* $32\pi/3$. Esse sólido é chamado de *toro*. *Rpta:* $2\pi^2 ba^2$.
5. Calcule o volume de uma calota esférica de altura H com $H \leq R$, onde R é a raio da esfera. *Rpta:* $\pi H^2(R - \frac{H}{3})$.
6. Mostre que
$$\int \frac{dx}{(1+x^4)\{(1+x^4)^{1/2} - x^2\}^{1/2}} = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^4}} - 1\right) + C.$$
   Dica: Use $\tan(\theta) = x^2$.
7. Calcule as seguintes integrais indefinidas:
   (a) $\int \frac{4x^2-1+9x}{x^3+2x^2-x-2} dx = \ln \frac{|(x+1)^3(x-1)^2|}{|x+2|} + C$
   (b) $\int \frac{5x-7}{(x-3)(x^2-x-2)} dx = \ln \frac{|(x-3)^2|}{|(x+1)(x-2)|} + C$
   (c) $\int \frac{x}{x^4-3x^2+2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{|x^2-2|}{|x^2-1|} + C$
   (d) $\int \frac{x^3+x^2-2x-3}{(x+1)^2(x-2)^2} dx = \frac{1}{9(x+1)} + \frac{5}{9(x-2)} - \frac{5}{27} \ln|x+1| + \frac{32}{37} \ln|x-2| + C$
   (e) $\int \frac{x^2+3x+5}{x^3+8} dx = \frac{11}{4\sqrt{3}} \arctan(\frac{x-1}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{4} \ln|x+2| + \frac{3}{8} \ln|x^2 - 2x + 4| + C$

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: `albertoramos@ufpr.br`.

(f) $\int \frac{1}{x^4+x^2+1}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}) + C$

8. Calcule
$$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x} = \frac{1}{2-\tan(x/2)} + C.$$
Dica: Faça $u = \tan(x/2)$. Assim, $\sin x = 2u/(1+u^2)$, $\cos x = (1-u^2)/(1+u^2)$.

9. Calcule $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x) + C$.

10. Calcule $\int \frac{dx}{1+\sin x} = \tan x - \sec x + C$.

11. Qual é a área limitada por as curvas $y = \ln x$ e $y = \ln^2 x$? *Rpta:* $A = (3-e)$.

12. Calcule a maior área limitada por as curvas $x^2 - 2y^3 = 0$, $y = 3$ e $8y = x^2$. *Rpta:* $A = 5\sqrt{2} + \frac{16}{5}$.

13. Qual é a área limitada por as curvas $4yx = \ln x$ e $y = x\ln x$? *Rpta:* $A = \frac{3-2\ln^2 2-2\ln 2}{16}$.

14. Calcule a área limitada por as curvas:
   (a) $x = e^y$, $x = 0$, $y = 0$, $y = ln4$. *Rpta:* 3
   (b) $y = x^2$, $x = y^3$, $y + x = 2$. *Rpta:* $\frac{49}{12}$.
   (c) $y(x^2+4) = 4(2-x)$, $x = 0$, $y = 0$. *Rpta:* $-\ln 4 + \pi/2$.
   (d) $y = \sec^2 x$, $y = \tan^2 x$, $x = 0$. *Rpta:* $(\pi-2)/2$
   (e) $y = x^2$, $y = 8 - x^2$, $y = 12 + 4x$. *Rpta:* 64
   (f) $y = 3x^{5/4} - x^{4/3}$, $x = 0$, $y = 0$, $x = -1$.*Rpta:* $\frac{18}{7}$.
   (g) $y = |x-5| - |x+3|$, $x + y = 2$. *Rpta:* 34

15. Encontre a área da região limitada por o gráfico da curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas verticais $x = -3$ e $x = 7$, onde
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-1|} & \text{, se } x \in (-\infty, 5] \\ (x-3)^2 - 2 & \text{, se } x \in (3, \infty) \end{cases}$$
Rpta: 76/3.

16. Dado $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\int_a^b x^n dx + \int_{a^n}^{b^n} \sqrt[n]{y}dy = b^{n+1} - a^{n+1}$.

17. Determine a convergência ou divergência das seguintes integrais impróprias. Se for possível calcule dita integral.
   (a) $\int_0^\infty xe^{-x}dx$ *Rpta:* converge, 1.
   (b) $\int_0^\infty \ln x dx$ *Rpta:* diverge.
   (c) $\int_0^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$ *Rpta:* converge, $\ln 2$.
   (d) $\int_{-\infty}^0 xe^{-x}dx$ *Rpta:* converge, -1.
   (e) $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx$ *Rpta:* converge, -1/2.
   (f) $\int_0^\infty xe^{-x^{1/2}}dx$ *Rpta:* converge, 2.
   (g) $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx dx$ *Rpta:* converge, $\frac{b}{a^2+b^2}$.
   (h) $\int_{-\infty}^\infty x^2e^{-x^3}dx$ *Rpta:* diverge.
   (i) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ *Rpta:* converge, $\pi/2$.
   (j) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ *Rpta:* converge, π.
   (k) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^3}$ *Rpta:* diverge.
   (l) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$ *Rpta:* diverge.
   (m) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}}$, $b > a$ *Rpta:* converge, π.
   (n) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec x dx$ *Rpta:* diverge.
   (o) $\int_1^\infty \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}dx$ *Rpta:* converge, 0.
   (p) $\int_0^1 x\sin^2(\frac{1}{x})dx$ *Rpta:* converge.

18. Seja $a > 0$. Encontre a área limitada por $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ e sua assíntota $x = 2a$. *Rpta:* $3a^2\pi$

19. Encontre a área limitada pelas curvas $yx = 1$, $y = \frac{x}{x^2+1}$ à direita da reta $x = 1$. *Rpta:* $\frac{1}{2}\ln 2$.

20. Calcule o volume do sólido obtido ao girar a curva $y = x + xy^2$ ao redor da sua assíntota vertical. *Rpta:* $\pi^2/2$.

21. Defina a *função Gamma*

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du, \text{ para } x > 0.$$

   (a) Mostre que $\Gamma(x)$ está bem definida para $x > 0$;

   (b) Use integração por partes para mostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $x > 0$.

   (c) Use indução para ver que $\Gamma(n+1) = n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (d) Prove que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.